MIRCEA POPESCU

INEGALITĂȚI - GIMNAZIU

Olimpiade și Concursuri Școlare

Editura SITECH

Craiova, 2019

CUPRINS

Enunțuri

1. Daca $a, b \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $a+b>0$, atunci $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4}$.

(Olimpiada locală, Bihor,1985)

2. Arătați că : $S=\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{90}}{19}<3$.

(Olimpiada județeană , Caraș-Severin, 1986)

3. Să se demonstreze că : $\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}<2$.

(Olimpiada județeană , Gorj, 1986)

4. Demonstrați că: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9999}}>99{,}99$

(Olimpiada locală, Argeș,1986)

5. Arătați că : $\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots+\frac{1}{2p}>\frac{1}{2}$, oricare ar fi $p>1$.

(Olimpiada județeană , Argeș și Vâlcea, 1986)

6. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi,să se demonstreze că:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

(Olimpiada județeană , Suceava, 1986)

7. Să se arate că : $a^{4n}+b^{4n}+c^{4n}\geq (abc)^n(a^n+b^n+c^n)$, pentru oricare a,b,c numere reale și $n\in \boldsymbol{N}$.

(Olimpiada județeană , Suceava, 1986)

8. Să se arate că oricare ar fi $x\in \boldsymbol{R}$, $4x^4-4x^3+2x^2+10x+25>0$.

(Olimpiada județeană,Teleorman,1990)

9. Se dau numerele reale $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq a_5$. Să se demonstreze că :

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\leq\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}.$$

(Olimpiada județeană,Alba,1988)

10. Să se demonstreze că :

a) $a^2+6a+9 \geq 0$ și $a^2+10a+26>0$, oricare ar fi $a \in \boldsymbol{R}$;

b) $(a^2+10a+26)(a^2+8a+18)(a^2+6a+12)>6$, oricare ar fi $a \in \boldsymbol{R}$;

c) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$. (Olimpiada județeană, Harghita,1988)

11. Fie a , b , c numere pozitive , astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că :

$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$. (Olimpiada județeană,Vrancea,1990)

12. Fie numerele reale pozitive a_1, a_2, a_3 astfel încât $a_1+a_2+a_3=1$. Arătați că $\sqrt{a_1(a_2+a_3)}+\sqrt{a_2(a_3+a_1)}+\sqrt{a_3(a_1+a_2)} \leq \frac{3}{2}$. Generalizați.

(Olimpiada județeană, Constanța,1988)

13. Fie x , y , z numere reale . Să se arate că : **a)** $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$; **b)** Dacă $x+y+z=1$, deduceți că $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$. (Olimpiada națională, Rm. Vâlcea,1986)

14. **a)** Să se arate că pentru orice x, y numere reale pozitive , are loc inegalitatea : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$;

b) Fie a, b, c, d numere reale pozitive , cu $abcd=1$. Atunci are loc inegalitatea: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+da+ac+bd \geq 1$.

(Olimpiada națională, Bacău,1987)

15. Demonstrați că : $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 1987}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1986}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1985}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1987\cdot 1}}>2\cdot\frac{1987}{1988}$.

(Olimpiada județeană,Argeș ,1988)

16. Fie $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, cu $x+y+z=1$. Să se arate că: $x^2+y^2+z^2 \geq 4(xy+yz+zx)-1$. Când are loc egalitatea ?

(Olimpiada națională,Pitești ,1990)

17. Fie a, b, c numere reale strict pozitive , astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9 .$$

(Olimpiada locală,Călărași,1990)

18. Dacă $a, b, c>0$ și $a+b+c=3$, să se determine valoarea minima a sumei $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

(Olimpiada județeană,Vrancea ,1989)

19. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 10$ are loc inegalitatea : $\frac{4}{3} \cdot n^3 > (n+1)^3$.

(Olimpiada națională,Baia Mare,1989)

20. Oricare ar fi $a, b \in \boldsymbol{R}$ arătați că avem : $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

(Olimpiada județeană,Brașov ,1990)

21. Să se arate că : $a^2 + b^2 + ab \geq 6(a + b - 2), (\forall) a, b \in \boldsymbol{R}$.

(Olimpiada județeană,Constanța ,1987)

22. Fie $a, b, c \in \boldsymbol{N}$, distincte și mai mari sau egale cu 2. Să se arate că :

$$(1 - \frac{1}{a^2})(1 - \frac{1}{b^2})(1 - \frac{1}{c^2}) > \frac{1}{2}.$$

(Olimpiada națională,Bacău ,1987)

23. Numerele x_1, x_2, x_3 și x_4 fiind pozitive oarecare, arătați că :

$$\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_3} + \sqrt{x_1 x_4} + \sqrt{x_2 x_3} + \sqrt{x_2 x_4} + \sqrt{x_3 x_4} \leq \frac{3}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

(Olimpiada județeană,Vrancea ,1988)

24. Să se determine numerele reale a , astfel încât oricare ar fi x și y reali , să aibă loc inegalitatea : $2a(x^2 + y^2) + 4axy - y^2 - 2xy - 2x + 1 \geq 0$.

(Olimpiada națională,Bacău ,1987)

25. Să se arate că nu există numere reale a, b, c care să verifice simultan relațiile :

$$a^2 + 1 < 2b + 3 \,;\, b^2 + 4 < 3c + a \,;\, c^2 + 9 < 2b + a.$$

(Olimpiada județeană,Bacău ,1994)

26. Dacă $x, y, z \in \boldsymbol{R}_+$ și $x + 2y + 4z = 1$, atunci :

$$2x + 1 \leq 3 \text{ și } \sqrt{2x+1} + \sqrt{4y+3} + \sqrt{8z+5} \leq 7.$$

(Olimpiada județeană,Tulcea ,1994)

27. Demonstrați inegalitatea :

$$\sqrt{x^2 + 4x + 13} + \sqrt{4x^4 + 8x^2 + 29} + \sqrt{9x^6 + 12x^3 + 53} > 15 \text{, oricare ar fi } x \in \boldsymbol{R}.$$

(Olimpiada județeană,Botoșani ,1990)

28. Aflați minimul expresiei :

$$E= 4x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+13\,,\ x,y,z \in \boldsymbol{R}\,.$$

(Olimpiada județeană,Vaslui ,1992)

29. Arătați că dacă $x < -\frac{1}{2}$, atunci $8x^3-4x^2-2x+1<0$.

(Olimpiada județeană,Timiș ,1991)

30. Arătați că oricare ar fi x real : $4x^4-4x^3+2x^2+10x+25>0$.

(Olimpiada județeană,Teleorman ,1990)

31. Dacă a , b , c sunt trei numere reale pozitive , atunci are loc inegalitatea :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

(Olimpiada județeană,Timiș ,1993)

32. Arătați că oricare ar fi $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ are loc inegalitatea :

$$a^2b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2+1 \geq 8abc.$$

(Olimpiada județeană,Galați ,1993)

33. Arătați că : $\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{d}\cdot\frac{c+d}{a}\cdot\frac{d+a}{b} \geq 16$, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a,b,c,d .

(Olimpiada județeană,Covasna ,1993)

34. Fie x,y,z,t numere reale pozitive cu $xyzt=1$. Demonstrați că :

$$x^2+y^2+z^2+t^2+xy+yz+zt+tx+xz+yt \geq 10.$$

(Olimpiada județeană,Argeș ,1993)

35. Arătați că : $\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\cdots+\frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1}<\frac{n}{2}\ ,n \in \boldsymbol{N}^*$.

(Olimpiada județeană,Botoșani,Bacău,Cluj,Prahova ,1993,G.m.7-8/1992)

36. Arătați că :

$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^m+\cdots+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^m+(\sqrt{2}-\sqrt{1})^m+(\sqrt{2}+\sqrt{1})^m+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^m+\cdots+$
$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^m$, oricare ar fi $m,n \in \boldsymbol{N}$.

(Olimpiada locală Constanța,1993)

37. Să se arate că intr-un triunghi ABC are loc relația :

$$b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)>a^3+b^3+c^3.$$

(Olimpiada județeană,Călărași ,1993,G.m.1992)

38. Demonstrați că : $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}<1{,}75.$

(Olimpiada de matematică , Buzău,1996)

39. Știind că $a,b\in\boldsymbol{R}_+^*$ și $x=\frac{ab+1}{b}$, $y=\frac{ab+1}{a}$, să se arate că : $2^{x+3}+2^{y+3}\geq 64.$

(Olimpiada de matematică , Argeș,1991)

40. Fie $a,b\in\boldsymbol{R}_+^*$, astfel încât $a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=10$. Să se arate că $ab\leq 16$.

(Olimpiada de matematică , Dâmbovița,1991)

41. Arătați că , $(\forall)a,b,c\in\boldsymbol{R}_+$, are loc inegalitatea : $ab+bc+ca\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$.

(Olimpiada de matematică , Vâlcea,1992)

42. Demonstrați că , dacă $a,b,c>0$, atunci : $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$.

(Olimpiada de matematică , Brașov,1994)

43. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci : $\left(\frac{a}{c}+b\right)^2+(ac+b)^2>2c^2$.

(Olimpiada de matematică Galați,1994)

44. Demonstrați că : $\frac{31}{66}<\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{27}+\frac{1}{48}+\cdots+\frac{1}{300}<\frac{19}{30}$.

(Olimpiada de matematică , Suceava,1994)

45. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi , arătați că :

$$a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)<0\,.$$ (Olimpiada de matematică , Argeș,1995)

46. Arătați că , dacă $ab=1$ și $a>b$, atunci $\frac{a^2+b^2}{a-b}\geq 2\sqrt{2}$.

(Olimpiada de matematică , Brăila,1996)

47. Demonstrați că : $\frac{a^3+b^3}{2}\geq\frac{a^2b+ab\sqrt{ab}+ab^2}{3}$; $a,b\in\boldsymbol{R}_+^*$.

(Olimpiada de matematică , Maramureș,1996)

48. Demonstrați că , dacă x, y sunt numere reale nenule , atunci :

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 \geq 0.$$

(Olimpiada de matematică , Mehedinți,1996)

49. Dacă $a, b, c \in \boldsymbol{R}, a+b+c=2, ab+bc+ca=1$, să se arate că :

$$\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{3b^2+1}+\sqrt{3c^2+1} \leq 6.$$

(Olimpiada de matematică , Tulcea,1997)

50. Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$, atunci $(b+c)(2a^2+b^2+c^2) \geq 8.$

(Olimpiada de matematică , Argeș,1998)

51. a) Fie $a > 0, b > 0$. Arătați că : $a^3+b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}$;

b) Fie $a, b, c \in \boldsymbol{N}$ distincte și mai mari sau egale cu 2.Să se arate că :

$$(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{b^2})(1-\tfrac{1}{c^2}) > \tfrac{1}{2}.$$

(Olimpiada de matematică , Harghita,1998)

52. Fie $x \geq 3, y \geq 5, z \geq 4$ și $x+y+z=29$. Arătați că : $\sqrt{x-3}+\sqrt{y-5}+\sqrt{z-4} \leq 10.$

(Olimpiada de matematică , Bistrița-Năsăud,1999)

53. Demonstrați că : $(a_1^2+4a_1+1)(a_2^2+4a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n^2+4a_n+1) \geq 6^n a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_n$.

(Olimpiada de matematică , Caraș-Severin,2000)

54. Fie $a, b, c \in [0, \infty)$astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că : $\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b} \geq \frac{3}{5}$.

(Olimpiada județeană,Buzău,2000)

55. Arătați că :

a) $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$, $(\forall) a, b, c > 0$;

b) $\frac{1}{d}\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a}\sqrt{b^2+c^2+d^2}+\frac{1}{b}\sqrt{c^2+d^2+a^2}+\frac{1}{c}\sqrt{d^2+a^2+b^2} \geq 4\sqrt{3}$

(Olimpiada județeană,Dâmbovița,Călin Burdușel ,2000)

56. Arătați că : $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \frac{4}{a+b+1}$, pentru $a, b > 0$.

(Olimpiada locală,Dâmbovița,1999)

57. Arătați că dacă $x, y, z \in \boldsymbol{R}, x < y < z$, atunci $\frac{z-x}{y-x}+\frac{z-x}{z-y} \geq 4$.

(Olimpiada locală,Harghita ,1999)

58. Să se demonstreze că : $\sqrt{1995}+\sqrt{1996}+\sqrt{1998}+\sqrt{1999} < 4\sqrt{1997}$.

(Olimpiada județeană,Bihor ,1999)

59. Dacă ,$b, c \in \boldsymbol{R}_{+}$, să se arate că : $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$.

(Olimpiada județeană,Caraș-Severin ,1999)

60. a) Să se arate că : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq 2\sqrt{\frac{a+b}{2}}$;

b) Arătați că : $\sqrt{1994}+\sqrt{1995}+\sqrt{1996}+\sqrt{1997}+\sqrt{1998} < 5\sqrt{1996}$;

c) Arătați că : $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

(Olimpiada județeană,Sibiu ,1999)

61. Să se demonstreze inegalitatea : $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}+\sqrt{110+\sqrt{110+\sqrt{110}}} < 17$.

(Olimpiada locală , Ialomița,2001)

62. Demonstrați că : $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}} \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, pentru orice numere reale strict pozitive a, b, c .

(Olimpiada locală , Dolj ,2001)

63. Dacă $a, b, c \in [0, \infty)$, să se arate că : $a^2+b^2+c^2+3 \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

(Concursul “Gheorghe Dumitrescu”,Craiova,oct.1999)

64. Să se arate că : $a^2+2b^2+3c^2+6d^2 \geq 2a(b+c+d)$, oricare ar fi numerele reale a, b, c, d . Precizați situația în care are loc egalitate.

(Concursul interjudețean de matematică”Grigore Moisil”,
ediția a XV-a,Bistrița,2000,Dumitru Acu)

65. Demonstrați că dacă $a, b, c > 0$ atunci : $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$.

(Concursul interjudețean de matematică"Lon CiolacȚ,Craiova,5 mai 2001)

66. a) Să se arate că pentru orice număr real a avem :

$$\boldsymbol{i)}\ 2a^4 - 2a^3 - a^2 + 1 \geq 0\ ;\ \ \boldsymbol{ii)}\ \frac{2a^3+a^2}{2a^4+1} \leq 1\ ;$$

b) Dacă numerele x, y, z îndeplinesc condiția $xyz = 1$, atunci arătați că :

$$\frac{2xy+1}{2x^2y^2+z^2} + \frac{2yz+1}{2y^2z^2+x^2} + \frac{2zx+1}{2z^2x^2+y^2} \leq 3\,.$$

(Concursul interjudețean de matematică"Filofteia Preda",Drăgășani,2000)

67. a) Fie $a, b > 0$. Demonstrați că : $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$, $(\forall)x, y \in \boldsymbol{R}$;

b) Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, arătați că : $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \geq 12$;

c) Dacă $a, b, c > 0$, arătați că : $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

(Olimpiada locală,Dâmbovița,2002)

68. Arătați că : $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x > 0$.

(Olimpiada locală,Giurgiu ,2002)

69. a) Dacă $a, b \in [0, \infty)$, atunci : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$;

b) Dacă $x, y \in [-2,2]$, arătați că : $x\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{4-x^2} \leq 4$.

(Olimpiada locală,Gorj ,2002)

70. Dacă , $b, c \in \boldsymbol{R}_+^*$, arătați că : a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; b) $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$.

(Olimpiada locală,Harghita ,2002)

71. a) Arătați că oricare ar fi $a, b \in \boldsymbol{R}_+$, are loc inegalitatea : $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$;

b) Demonstrați că pentru orice x număr real pozitiv are loc inegalitatea :

$$\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2+36} + \sqrt{x^2+49} + \sqrt{x^2+64} \geq (2x+13)\sqrt{2}\,.$$

(Olimpiada locală,Maramureș ,2002)